

Chapitre VI : mouvement à force centrale

VI - 1. Introduction :

C'est le mvt d'un pt matériel M qui est soumis à une force (ou résultante des forces) \vec{F} passant par un pt fixe appelé centre de force

$\Rightarrow \vec{F}$ est colinéaire au vecteur position
le pt O est le centre de la force

$$\vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

aussi, on a : $\vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$

\vec{v} est colinéaire à \vec{OM} .

VI - 2 Conservation du moment cinétique et conséquences.

soit un pt M en mvt dans un réf. galiléen, soumis à une force centrale \vec{F} .

Th. de moment cinétique :

$$\frac{d\vec{S}_O(M)}{dt} = \vec{N}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{S}_O(M)$ est un vecteur constant.

Cette conservation permet de donner comme conséquences :

- le pt M effectue une trajectoire plane

En effet : $\vec{S}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M)$
 $= \vec{L}$: vecteur constant

Le vecteur \vec{OM} est constamment perpendiculaire à \vec{L} .
 M décrit alors une trajectoire située dans le plan Π à \vec{L} . On dit que la trajectoire est plane

2ème co

Le mvt s'effectue suivant la loi de conservation de l'énergie

Le rayon vecteur \vec{OM} balaye des aires identiques pendant des temps égaux. En effet, on prend soit une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

t.q: $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

$$\vec{V}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_0(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(M) \\ = m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

or: $\vec{\Gamma}_0(M)$: vecteur cst $\Rightarrow \vec{\Gamma}_0(M) = \Gamma_0 \cdot \vec{k}$

$$\Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = \Gamma_0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \frac{\Gamma_0}{m}$$

En choisissant une cst C t.q:

$$C = \frac{\Gamma_0}{m}$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C$$

$$r^2 d\theta = C \cdot dt$$

$$r \cdot (r d\theta) = C \cdot dt$$

$$2 ds = C \cdot dt$$

où ds est l'aire élémentaire balayée par le rayon vecteur pendant dt

$$\Rightarrow ds = \frac{C}{2} dt$$

C'est la loi des aires et C est appelée la constante des aires.

Explication:



Le mouvement de la planète P autour du soleil s'effectue selon la loi des aires.

\Rightarrow Si P met la même durée pour aller de A à B et de C à D.

\Rightarrow Les zones hachurées sont de même aires.

VI - 3 Formules de Binet :

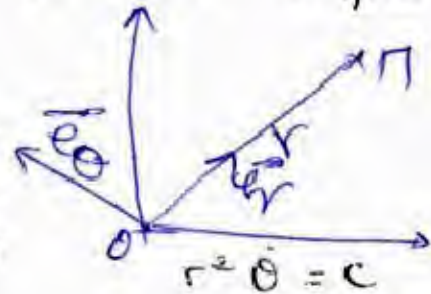
i). 1^{ère} formule de Binet :

Soit M un pt matériel, en movt à force centrale.

$$\vec{V}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{V}^2(M) = V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$



$$\text{Or } \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -c \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

$$\text{On posera : } u = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r} = -c \cdot \frac{du}{d\theta}$$

$$(r\dot{\theta})^2 = r^2 \cdot \left(\frac{c}{r^2}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2} = c^2 \cdot u^2$$

$$\Rightarrow V^2 = c^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \quad : \text{c'est la 1^{ère} formule de Binet}$$

ii). 2^{ème} formule de Binet :

$$\text{En c.p : } \vec{\gamma}(M) = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\text{Or : } \vec{\gamma} // O\vec{M} \Rightarrow \gamma_\theta = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M) = \gamma_r(M) \vec{e}_r$$

$$\text{ou } \gamma_r(M) = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$$

$$r(\dot{\theta})^2 = r \left(\frac{c}{r^2} \right)^2 = \frac{c^2}{r^3} = c^2 \cdot u^3 \quad (u = \frac{1}{r})$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

$$= \frac{c}{r^2} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{c du}{dr} \right) \quad \left(\dot{r} = -c \cdot \frac{du}{d\theta} \right)$$

$$\ddot{r} = -c^2 \cdot u^2 \cdot \frac{du}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma_r(M) = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \text{ C'est la 2ème formule de Binet}$$

si la résultante des forces appliquée à un pt M est une force centrale alors sa vitesse et son accélération de M dans R vérifient les deux formules de Binet.

retrouver l'expression de la cste des aires en utilisant le fait que $\gamma_\theta = 0$

III - 4 : Etude dynamique d'un mvt à force centrale.

On s'intéresse dans cette partie aux forces proportionnelles à $\frac{1}{r^2}$ t.q :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

Soit M soumis à \vec{F} dans un réf. galiléen \Rightarrow mvt à force centrale.

a) - Equation de la trajectoire :

$$\text{* P.F.D : } m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

$$m\gamma_r = -\frac{K}{r^2}$$

$$\text{Or : } \gamma_r(M) = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

$$\Rightarrow -m C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = -\frac{K}{r^2} = -K u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2}$$

C'est l'équation différentielle du mvt

$$S_g = S_{ssm} + S_p$$

$$u_{ssm} = A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta$$

$$\text{ou aussi : } u_{ssm} = A \cos(\theta + \varphi)$$

$$u_p = ? \Rightarrow u_p = \frac{k}{mc^2}$$

$$u = A \cos(\theta + \varphi) \frac{k}{mc^2} + \frac{k}{mc^2}$$

On pose : $P = \frac{k}{mc^2}$

$$u = A \cos(\theta + \varphi) \frac{k}{mc^2} + \frac{1}{P}$$

$$\Rightarrow u = \frac{A \cdot P \cos(\theta + \varphi) + 1}{P} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{P}{1 + A \cdot P \cos(\theta + \varphi)}$$



On posera : $e = A \cdot P$

$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\theta + \varphi)} \quad (r = f(\theta))$$

* En choisissant, $\varphi = 0$ c'est à dire que l'origine des angles est 0.

$$\Rightarrow r = \frac{P}{1 + e \cos \theta} : \text{c'est l'équation d'une conique}$$

Propriétés des coniques :

Définition : C'est le lieu des pts M t.q le rapport des distances par rapport à un pt appelé foyer et par rapport à un axe (Δ) appelé directrice est est.

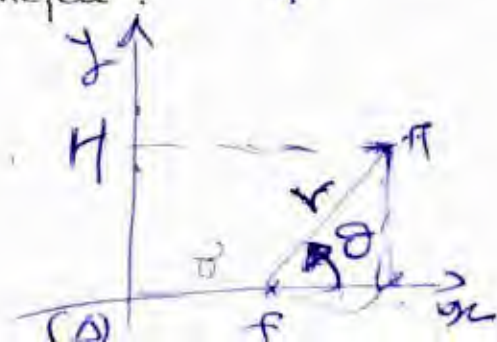
$$\frac{MF}{MH} = e = \text{cte}$$

e c'est l'excentricité de la conique.

Eq. polaire de la conique :

$$r = e \cdot MH$$

$$= e(r \cos \theta + h)$$



$$r = r e \cos \theta + eh$$

$$r(1 - e \cos \theta) = eh$$

On pose : $P = e.h$

$$\Leftrightarrow r = \frac{P}{1 - e \cos \theta} \quad : \text{Equation polaire de la conique}$$

Equation cartésienne de la conique:

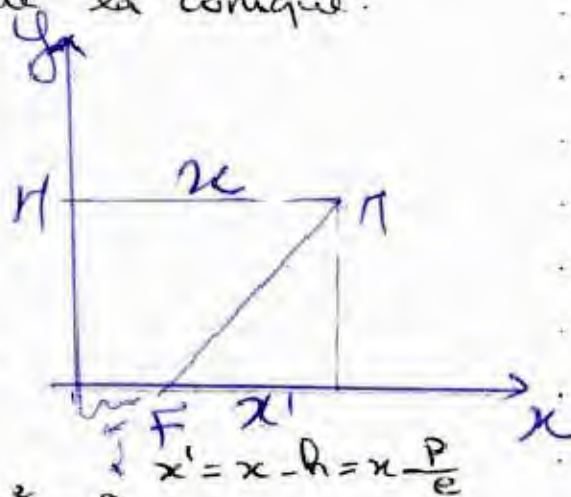
$$MF = e.MH$$

$$\Rightarrow (MF)^2 = e^2 . (MH)^2$$

$$(y^2 + x'^2) = e^2 x^2$$

$$y^2 + \left(x - \frac{P}{e}\right)^2 = e^2 x^2$$

$$y^2 + x^2 - \frac{2Px}{e} + \frac{P^2}{e^2} = e^2 x^2$$



$$x^2(1 - e^2) - \frac{2Px}{e} + \frac{P^2}{e^2} + y^2 = 0$$

On distingue les cas suivants :

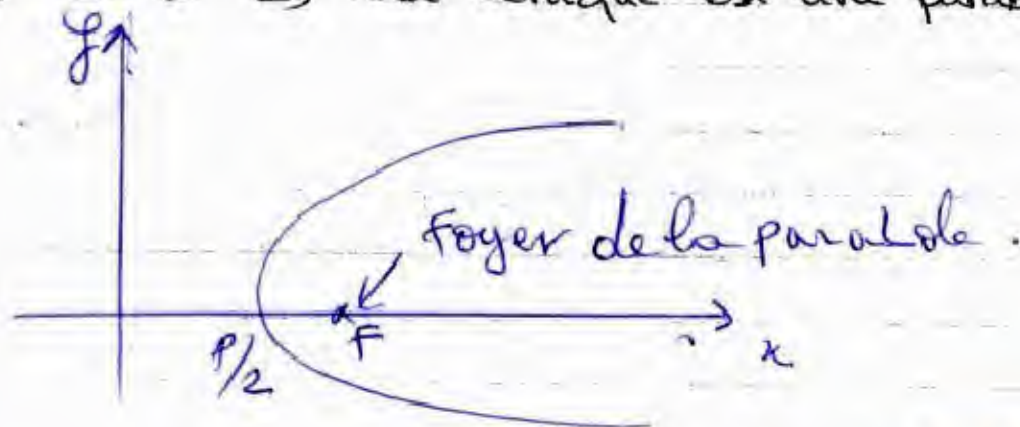
$$e = 1 : y^2 - 2Px + P^2 = 0$$

$$y^2 - 2P\left(x - \frac{P}{2}\right) = 0$$

On posera : $\begin{cases} X = x - \frac{P}{2} \\ Y = y \end{cases}$

$$Y^2 = 2PX \quad : \text{c'est l'equation d'une parabole.}$$

\Rightarrow si $e = 1 \Rightarrow$ la conique est une parabole



Cas où $e \neq 1$

$$\text{On peut écrire : } \frac{p^2}{e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \times \frac{1-e^2}{e^2} \\ = \frac{p^2}{(1-e^2)} \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right)$$

$$x^2(1-e^2) - \frac{2Px}{e} + \frac{p^2}{e^2(1-e^2)} + y^2 = 0$$

$$(1-e^2) \left(x^2 - \frac{2P}{e(1-e^2)} x + \frac{p^2}{e^2(1-e^2)^2} \right) + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$(1-e^2) \left(x - \frac{P}{e(1-e^2)} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} X = x - \frac{P}{e(1-e^2)} \\ Y = y \end{cases}$$

$$\left[(1-e^2) X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \right] \times \left(\frac{1-e^2}{p^2} \right)$$

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2} \cdot X^2 + Y^2 \left(\frac{1-e^2}{p^2} \right) = 1$$

$$\text{On pose : } a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \quad \text{si } e < 1$$

$$\text{ou } b^2 = -\frac{p^2}{1-e^2} \quad \text{si } e > 1$$

\Rightarrow si $0 < e < 1$: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
la conique est une ellipse.

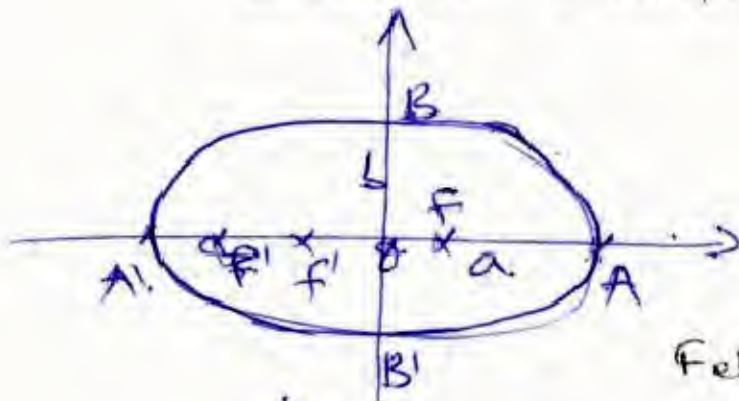
Cas limite : $e = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 \quad (a^2 = b^2 = p^2)$$

la conique est ici un cercle.

si $e > 1$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

C'est le cas d'une hyperbole.
Schéma de l'ellipse :

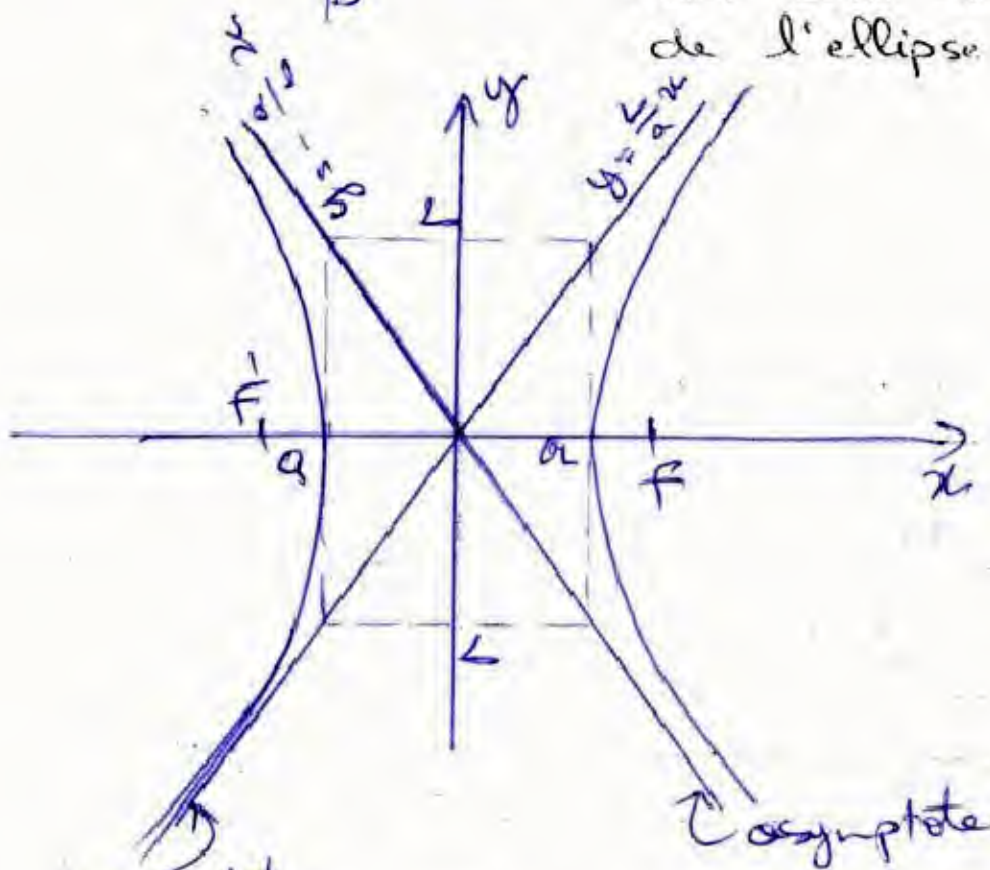


a : demi grand axe
de l'ellipse

b : demi petit axe

$OF = OF'$

F et F' sont les deux foyers
de l'ellipse.



Asymptote

$OF = OF'$

$e > 1$

F et F' st les 2 foyers de l'hyperbole

b) - Energie mécanique :

* $E_m = E_c + E_p$

$\Rightarrow E_p = ?$

On sait que : $dE_p = -dw(\vec{F})$

$$\begin{aligned}
 dE_p &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\
 &= \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r \\
 &= \frac{k}{r^2} dr
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{k}{r^2} + \text{cte}$$

$$E_p(\infty) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$$

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{k}{r} (1 + e \cos \theta)$$

$$+ E_c = \frac{1}{2} m^P v^2$$

le mvt est central \Rightarrow la vitesse vérifie la 1^{ère} formule de Binet.

$$v^2 = c^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right)$$

$$\text{or : } u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{2p}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{-e \sin \theta}{p} \right)^2$$

$$v^2 = c^2 \left(\frac{1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right)$$

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m c^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{k}{p} (1 + e \cos \theta)$$

$$\text{or : } p = \frac{m c^2 p^2}{k}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta - 2 - 2e \cos \theta)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1) = -\frac{k}{2p} (1 - e^2)$$

si $e = 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une parabole
 $E_m = 0$

si $e < 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une ellipse
 $E_m < 0$

si $e > 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une hyperbole
 $E_m > 0$

c/- Cas particulier : Mvt elliptique

$$E_m = -\frac{\kappa}{2} \cdot \frac{(1-e^2)}{p}$$

Or, on a va : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow E_m = -\frac{\kappa}{2a}$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse

C'est le temps mis pour effectuer un tour de la trajectoire elliptique. Pendant un tour, le rayon vecteur balaye l'aire de l'ellipse.

$$S = \pi \cdot a \cdot b \quad (\text{aire balayée par l'ellipse pendant un tour})$$

* selon la loi des aires :

$$S = \frac{C^2}{2} \cdot T$$

$$\Rightarrow \pi^2 a^2 b^2 = \frac{C^2}{4} \cdot T^2 \quad (T \text{ est la période de l'ellipse})$$

$$a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$p = \frac{m c^2}{\kappa}$$

$$b^2 = (1-e^2) \cdot a^2$$

$$4\pi^2 a^3 (1-e^2)^{-3/2} = \frac{GM}{C^2 T^2}$$

$$4\pi^2 a^3 \cdot \frac{P}{a} = C^2 T^2$$

$$4\pi^2 a^3 \cdot \frac{m C^2}{K} = C^2 \cdot T^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot a^3 \quad : \text{la 3^{ème} loi de Kepler (à énoncer après)}$$

d) - Mvt des planètes (loi de Newton) :

i/- Définition :

Dans le domaine de la gravitation, une masse m_1 placée en un pt O est une masse m_2 placé en un pt I. Il subit de la part de O (m_1) la force :

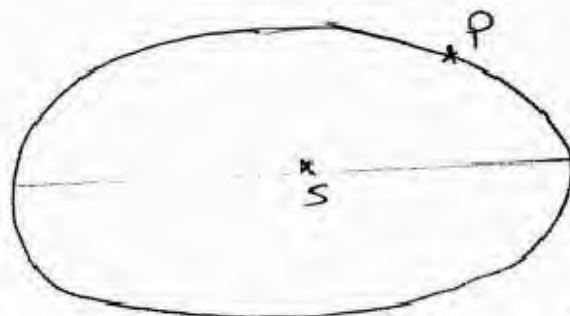
$$\vec{F} = - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

* la loi de Newton est basée sur les lois de Kepler qui sont basées sur des observation expérimentales.

ii/- Énoncé des lois de Kepler :

1^{er} loi : la trajectoire effectuée par une planète dans son mvt autour du soleil est une ellipse dont le soleil est l'un de ses foyers.



2^{ème} loi : la trajectoire vecteur issue du soleil passe par la planète balaye des aires identiques pendant des temps égaux (la loi des aires).

3^{ème} loi : le carré de la période au revirement du soleil est proportionnelle au cube de demi grand axe de l'ellipse.

Remarque : Dans le cas de forces gravitationnelles (Newton)

$$k = G \cdot m \cdot M$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \cdot a^3$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{G \cdot m \cdot M} \cdot a^3$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

s'il s'agit des planètes autour du soleil ($M = M_s$ et $m =$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} \quad \forall \text{ la planète}$$

Conclusion : Cette équation peut être utilisée pour déterminer la masse du soleil. Aussi, s'il s'agit des satellites autour de la terre.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} \quad \forall \text{ le satellite}$$

\Rightarrow utile dans la détermination de la masse de la terre.

iii/- Vitesses cosmiques :

a - 1^{ère} vitesse cosmique :

C'est la vitesse d'un corps décrivant une orbite circulaire autour d'une grande masse (satellite autour de la terre)

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m V_c^2 - \frac{K}{a} = -\frac{K}{2p} (1 - e^2)$$

Trajectoire circulaire
de rayon a

$$\frac{1}{2} m V_c^2 - \frac{k}{a} = -\frac{k}{2a}$$

$$\frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{k}{2a} = \frac{G \cdot m \cdot M}{2a}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a}}$$

Si il s'agit des satellites aux basses altitudes (h)

$$a = R_T + h \approx R_T$$

$$V_c = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$$

si aussi la vitesse de satellisation minimale (V_{sm})
qu'on doit communiquer à un satellite lors de son
lancement pour qu'il effectue une trajectoire circulaire
autour de la terre.

b/- Vitesse de libération:

c'est la vitesse communiquée à un corps pour qu'il
s'échappe de l'attraction vis à vis d'une grande masse
(ex: satellite et la terre) et effectuant une trajectoire
parabolique.

Pour une parabole: $E_m = 0$

$$E_m(\text{corps}) = \frac{1}{2} m V_l^2 - \frac{k}{r_0} = 0$$

$$\frac{1}{2} m V_l^2 = \frac{G \cdot m \cdot M}{r_0} \quad (a = r_0)$$

$$V_l = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (\text{si le pt de lancement d'un satell
et le sol } r_0 = R_T)$$

- Comment la trajectoire d'un satellite autour de la terre en faisant varier sa vitesse de lancement :
si $V_0 < V_{sm}$: le satellite retombe sur le sol en effectuant une trajectoire parabolique.

si $V_0 = V_{sm}$: le satellite décrira une orbite circulaire autour de la terre.

si $V_{sm} < V_0 < V_e$: le satellite décrira une trajectoire elliptique.

si $V_0 = V_e$: le satellite décrira une trajectoire parabolique.

si $V_0 \gg V_e$: le satellite décrira une trajectoire hyperbolique.

Dans les deux derniers cas les trajectoires ne sont plus fermées et le satellite s'éloigne indéfiniment de la terre.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..